第一章 信号与系统概述

一、def 信号、系统

① 信息 $H=-\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2 p(x_i)$

$=-E[p(x_i)]$ (信息熵)

② 信号：信息的载体(光信号、电信号、声信号等)

③ 系统：相互关联的事物组合成具有特定功能的整体

(输入、输出)

二、信号的分类

能写出表达式　无法写出表达式

1. 确定信号/随机信号

又分为完全不确定/有某种潜在规律

(白噪声)　(语音信号、雷达信号等)

△平稳信号/非平稳信号

△信号处理

传统

模拟信号：傅立叶变换　自变量与信号参量取值连续

数字信号：快速傅立叶变换(FFT)　自变量与信号参量取值离散

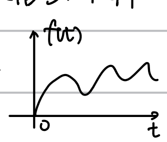
2. 连续信号和离散信号

连续信号，除去某些不连续点，对于任意自变量能得到确定函数值

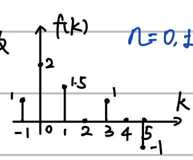
针对时间，定义域连续/离散

离散信号：采样

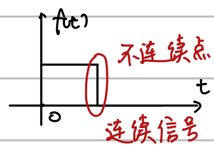
连续



离散



$n=0,\pm1,\pm2\ldots$　又称为序列



$f(t)=f(t+mT)$　T：最小正数

$f(k)=f(k+mN)$　N：最小正整数

(傅立叶分析)　(傅立叶变换)

3. 周期信号/非周期信号 (定义在$(-\infty,+\infty)$上)

连续信号：

① 单个信号：正余弦信号、复指数信号($e^{j\omega t}$)均为周期信号，$T=\frac{2\pi}{\omega}$

② 多个信号　$f(t)=f_1(t)+f_2(t)$

① $f_1(t)$、$f_2(t)$中有一个非周期，另一个周期，则一定非周期

② 非周+非周　可能为周期：$f_1(t)=\sin t+\frac{1}{t}$，$f_2(t)=\sin t-\frac{1}{t}$

② 周+周　未必为周期，看是否可化为最简整数比

离散信号：

需要的周期个数

① 单个信号　当$\frac{2\pi}{\omega}$可化为$\frac{N}{m}$时，N为最小周期，m为连续化时

② 多个信号

① 周+周　一定为周期　N为N_1,N_2最小公倍数

② 周+非周　一定非周期

③ 非周+非周　不定　$(\sin(\pi k)+\frac{1}{k})+(\sin(\pi k)-\frac{1}{k})$

4. 实信号/复信号

信号函数值是实数/复数

复信号：e^{st}，$s=\sigma+j$

5. 能量信号/功率信号　// $\lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2dt$

连续：(1) 能量 $E=\lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2dt$　实信号可写作 $E=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt$

(2) 功率 $P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2dt$　能量=功率·T，($T\to\infty$)

$E<\infty$，能量(有限)信号，此时$P=0$

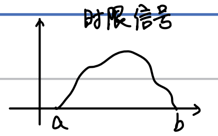
$P<\infty$，功率(有限)信号，此时$E=\infty$

离散：$E=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}|f(k)|^2$

$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}|f(k)|^2$

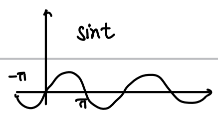
非能量非功率信号：$E\to\infty$，$P\to\infty$

△判别



$\int_a^b$ 有限值 dt

可积信号为时限，则为能量信号



$\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin^2 t\,dt$

与 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\,dt$ 等价（周期信号）

① $f(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, $P=\frac{A^2}{2}$，功率信号

② $f(t)=A$，$P=A$，功率信号

③ $f(t)=\begin{cases} A & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$，功率信号

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\,dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}A^2\,dt=\frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2}\cdot A^2=\frac{A^2}{2}$$

④ 周期信号通常为功率信号

功率与每个周期内功率相等，$P=\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2\,dt$

信号的大小 — 信号规范量 (Norm)

模可积、模可和
（连续）（离散）

有界连续信号 $x(t)$

满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,dt<\infty$，则称为模可积

有界离散信号 $x(k)$

满足 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|x(k)|<\infty$，则称为模可和

def 若 $x(t)$ 模可积

则定义一阶规范量 $\|x(t)\|_1=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,dt$

$$\|x(k)\|_1=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|x(k)|$$

若 $x(t)$ 有界但非模可积

则定义一阶规范量 $\|x(t)\|_1=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|\,dt$

$$\|x(k)\|_1=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}|x(k)|$$

def 二阶规范量

若 $x(t)$ 模可积，则定义二阶规范量

$\|x(t)\|_2=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt}$ 能量

$\|x(k)\|_2=\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|x(k)|^2}$ 功率

若 $x(t)$ 有界但非模可积，则定义二阶规范量

$$\|x(t)\|_2=\lim_{T\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt}$$
$$\|x(k)\|_2=\lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}|x(k)|^2}$$

$t \rightarrow f$

能量信号 $\xrightarrow[\text{定律}]{\text{维纳-辛钦}}$ 能量谱

功率信号 功率谱

6. 一维信号/多维信号

"维度"——自变量个数

7. 因果信号/反因果信号

$t=0$ 时接入系统的信号

三.信号的基本运算

1.加法,乘法

定义域组合

$f_1(k)=\begin{cases}2^k & k<0\\ k+1 & k\geq 0\end{cases}$ $\quad f_2(k)=\begin{cases}0 & k<-2\\ 2^{-k} & k\geq -2\end{cases}$

$f(k)=f_1(k)\cdot f_2(k)$

$=\begin{cases}0 & k<-2\\ 1 & -2\leq k<0\\ 2^{-k}(k+1) & k\geq 0\end{cases}$

2.平移

$f(t)\to f(t+t_0)$ 左加右减

3.反转

以纵轴为对称轴反转 $f(-t)$

4.尺度变化

$f(t)\to f(\omega t)$ 横坐标乘 $\frac{1}{\omega}$

例 $f(-2t+3)$

$f(t)\to f(t+3)$ 左3

$f(t+3)\to f(-t+3)$ 翻转

$f(-t+3)\to f(-2t+3)$ 横坐标乘 $\frac{1}{2}$

平移→翻转→尺度变化

离散: $f(k)\to f(2k)$ 取点 ($0,\pm1,\pm2\ldots \quad 0,\pm2,\pm4\ldots$)

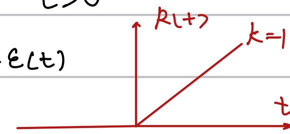
$f(k)\to f(\frac{1}{2}k)$ 插点 ($0,\pm1,\pm2\ldots \quad 0,\pm2,\pm4\ldots$)

四.阶跃函数,冲激函数

阶跃函数 $\xrightarrow{求导}$ 冲激函数 ; 冲激函数 $\xrightarrow{积分}$ 阶跃函数

阶跃函数: $\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$

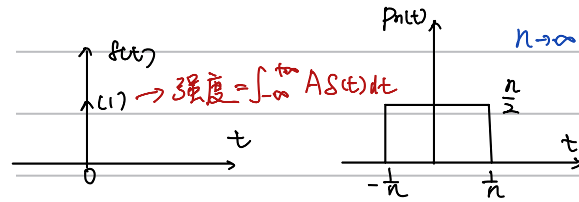
积分: $\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(\tau)d\tau=t\cdot\varepsilon(t)$



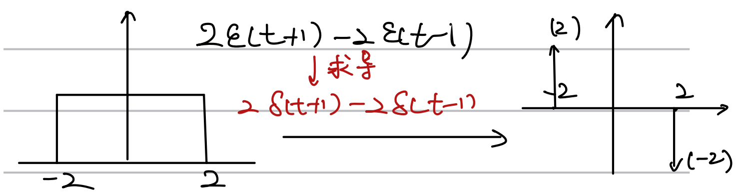
单位斜升函数

冲激函数

$\begin{cases}\delta(t)=0,\ t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1\end{cases}$



关系: $\delta(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$, $\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$



△冲激函数的性质

① 相乘取样 $f(t)\cdot\delta(t)=f(0)\cdot\delta(t)$

$f(t)\cdot\delta(t-a)=f(a)\cdot\delta(t-a)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\delta(t)dt=f(0)$

② 导数 $f(t)\cdot\delta'(t)=f(0)\cdot\delta'(t)-f'(0)\cdot\delta(t)$

证 $[f(t)\cdot\delta(t)]'=f'(t)\cdot\delta(t)+f(t)\cdot\delta'(t)$

$f(t)\cdot\delta'(t)=f(0)\cdot\delta'(t)-f'(0)\cdot\delta(t)$

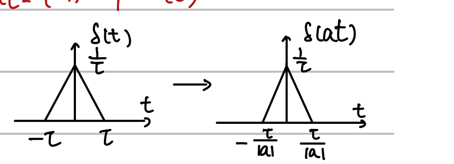
定义 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)dt=-f'(0)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)dt=(-1)^n\cdot f^{(n)}(0)$

③ 尺度变换

$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

$\delta(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$

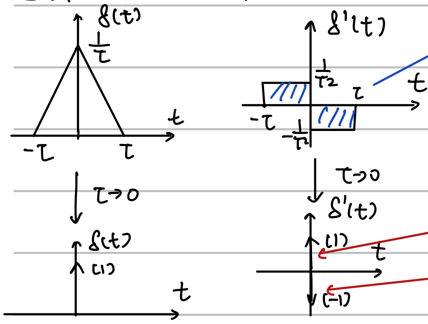


面积变为 $\frac{1}{|a|}$,强度为 $\frac{1}{|a|}$

即为 $\delta(t)$ 前系数

$\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\cdot\delta^{(n)}(t)$

△冲激偶 $\delta'(t)$



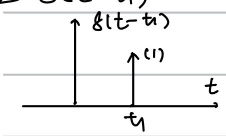
可看出 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\,dt=0$

取 $\delta'(t)$为方向向上

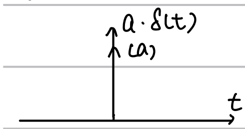
取 $-\delta'(t)$为方向向下

(通常省去负冲激)

△ $\delta(t-t_1)$

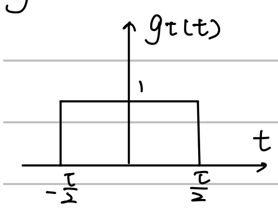


$a\cdot\delta(t)$



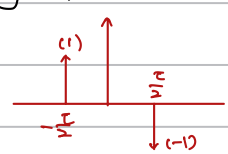
门宽

$g_\tau(t)$ —— 门函数



表达式 $g_\tau(t)=\varepsilon(t+\frac{\tau}{2})-\varepsilon(t-\frac{\tau}{2})$

求导



△ $\delta(t)$积分

$t<0$ 时, $\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,dt=0$

$t>0$ 时, $\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,dt=1$

因此 $\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,dt=\varepsilon(t)$

$\varepsilon'(t)=\delta(t)=0 \quad t<0$ 或 $t>0$

$t=0$时, 跳跃间断点求导时, 出现冲激信号

冲激强度 $= f(t_0^+)-f(t_0^-)$

△ $\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(t)\varphi(t)\,dt$

$=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ 去阶跃函数, 改积分限

△ $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\cdot\delta'(t)\,dt=-\varphi'(0)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\delta^{(n)}(t)\,dt=(-1)^n\cdot\varphi^{(n)}(0)$

△位移

$f(t)\cdot\delta(t-t_1)=f(t_1)\cdot\delta(t-t_1)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\delta(t-t_1)\,dt=f(t_1)$

$f(t)\cdot\delta'(t-t_1)=f(t_1)\cdot\delta'(t-t_1)-f'(t_1)\cdot\delta(t-t_1)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\delta'(t-t_1)\,dt=-f'(t_1)$

△ $\delta'(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a}\cdot\delta'(t)$

推导 $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\delta(t)$

$a\cdot\delta'(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\delta'(t)$

$\therefore \delta'(at)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{|a|}\cdot\delta'(t)$

$\delta^{(n)}(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a^n}\,\delta^{(n)}(t)$

$\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\cdot\delta^{(n)}(t)$

n为奇数 $\delta^{(n)}(-t)=-\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t)$为奇函数

n为偶数 $\delta^{(n)}(-t)=\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t)$为偶函数

△复合函数求导

$\delta^{(n)}[f(t)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|f'(t_i)|}\,\delta(t-t_i)$

① 求$f(t)$零点 $t_1,t_2..t_n$

② 求$f'(t)$

③ 求$f'(t_1),f'(t_2)\dots f'(t_n)$

④代入公式

△ $\delta(k)$与$\varepsilon(k)$

$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases} \qquad \varepsilon(k)=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$

公式总结:

① $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t)dt=\varphi(0)$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(t)\varphi(t)dt=\int_{0}^{+\infty}\varphi(t)dt$

③ $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\cdot\delta'(t)dt=-\varphi'(0)$

④ $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\cdot\delta^{(n)}(t)dt=(-1)^n\cdot\varphi^{(n)}(0)$

⑤ $\delta(t)=\varepsilon'(t)$

⑥ $\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(t)dt=t\cdot\varepsilon(t)$

⑦ $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$

⑧ $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)dt=0$

⑨ $f(t)\cdot\delta(t)=f(0)\cdot\delta(t)$

⑩ $f(t)\cdot\delta'(t)=f(0)\cdot\delta'(t)-f'(0)\cdot\delta(t)$

五、系统的描述

△ 方程

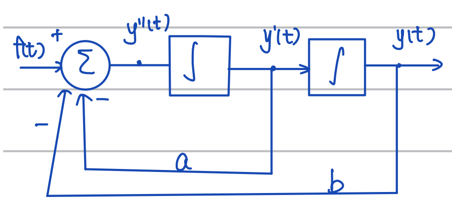
连续动态系统 —— 微分方程 $y(t)=f'(t)=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ [动态]

离散动态系统 —— 差分方程

△ 框图

积分器，加法器，数乘器 延时器 $f(t)\to\boxed{T}\to f(t-T)$

$y''(t)=f(t)-ay'(t)-by(t)$



△ 差分方程

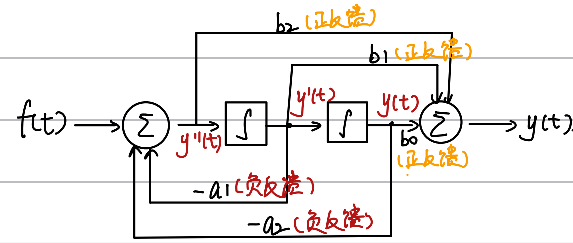
前向: $x(k)$ 与 $x(k-1)$

后向: $x(k)$ 与 $x(k+1)$

差分器 $f(k)\to\boxed{D}\to f(k-1)$

△ 框图与微分/差分方程相互转化

微分方程: 最高阶求导次数 = 积分器个数



$y''(t)-a_1y'(t)-a_2y(t)=b_2f''(t)+b_1f'(t)+b_0f(t)$

六、系统的特性与分析方法

△ 连续系统/离散系统

△ 动态系统/即时系统

△ 线性性质

$T[af(\cdot)]=aT[f(\cdot)]$ 齐次性

$T[f_1(\cdot)+f_2(\cdot)]=T[f_1(\cdot)]+T[f_2(\cdot)]$ 可加性

△ 动态系统是线性系统的条件 分解特性

可分为内，外部激励，零输入+零响应 $y(t)=\underbrace{y_{zi}(t)}_{零输入}+\underbrace{y_{zs}(t)}_{零响应}$

分解特性+零输入零状态线性=线性系统

非线性

① $y(t)=f(t)+A$

② $y(t)=f(t)$ 高次方

③ $y(t)=|f(t)|$ 含绝对值

④ $y(t)=g[f(t)]$

△ 时不变系统与时变系统

def. 输入延迟 t_0，零状态响应延迟 t_0 (移位不变性)

时变: $y(t)=f(at+b)\ (a\neq1)$

$y(t)=m(t)\cdot f(t)$

$y(t)=f(t)+m(t)$

△LTI 系统的微分与积分特性

① $f(t) \to y_{zs}(t)$，则 $f'(t) \to y'_{zs}(t)$

② $f(t) \to y_{zs}(t)$，$f(-\infty)=0$，$y_{zs}(-\infty)=0$

则 $\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} y_{zs}(x)\,dx$

△因果系统与非因果系统

因果系统：零状态响应不会出现在激励之前

$t<t_0$，$f(t)=0$，$y_{zs}(t)=0$

△稳定系统与不稳定系统

$|f(\cdot)|<\infty$（有界），则 $|y_{zs}(\cdot)|<\infty$（有界）

△LTI 系统的分析方法

输入输出（外部）　状态变量（内部）