3.1～3.9

第三章 Fourier分析

- Fourier级数
- Fourier变换
- 通信系统的应用

LTI系统中

△ $e^{st}=e^{j\omega t}=\cos\omega t+\sin\omega t$ 复指数信号

△卷积

让 $e^{st}*h(t)$ 得到的 $y_{zs}(t)$

$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$

$=e^{st}\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}$ s的函数

$=H(s)\cdot e^{st}$

连续情况:

△ $s=j\omega,\ y(t)=H(j\omega)e^{j\omega t}$

$H(s)$ 特征值

$e^{j\omega t}$ 特征函数

离散情况: z^n, z是复数, $z=e^s$

$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)\cdot z^{n-k}=\underset{\uparrow\text{特征函数}}{z^n}\cdot\underline{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)\cdot z^{-k}}\rightarrow z$的函数

$=z^n\cdot H(z)\rightarrow$ 特征值

△欧拉公式 $\cos(\omega t)=\dfrac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2}$

△任意信号都可用无穷多个正弦/余弦函数叠加

△ Dirichlet 条件

$f(t)$ 满足 ① 周期内有限个间断点

或 ② 周期内极大值极小值有限个

或 ③ 周期内可积

△完备正交函数集

矢量正交且唯一(空间内)

↓推广到信号

信号的正交: $\int_{t_1}^{t_2}\varphi_1(t)\varphi_2(t)dt=0$, 则 $\varphi_1(t)$与$\varphi_2(t)$正交

完备正交函数集

$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j(t)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ k_i\neq 0 & i=j\end{cases}$

且不存在集合外函数使 $\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\psi(t)\,dt=0$

① $\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(m\Omega t)\cos(n\Omega t)dt=\begin{cases}0 & \text{当 } m\neq n\\ \frac{T}{2} & \text{当 } m=n\neq 0\\ T & \text{当 } m=n=0\end{cases}$

② $\int_{t_0}^{t_0+T}\sin(m\Omega t)\sin(n\Omega t)dt=\begin{cases}0 & \text{当 } m\neq n\\ \frac{T}{2} & \text{当 } m=n\neq 0\end{cases}$

③ $\int_{t_0}^{t_0+T}\sin(m\Omega t)\cos(n\Omega t)=0$ $\forall m,n$

若有相位, 则用三角公式拆开

△复函数正交

$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt=0$ $=\begin{cases}0 & i=j\\ k_i\neq 0 & i\neq j\end{cases}$

*: 共轭

△三角形式 一般取上下限 $-\frac{T}{2},\frac{T}{2}$

$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\,dt$ 直流分量

$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt$ n偶函数

$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt$ n奇函数

证 $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)$

两边乘 $\cos(n\omega_1 t)$, 并从 $-\frac{T}{2}$ 至 $\frac{T}{2}$ 积分

$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt=\underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}a_0\cos(n\omega_1 t)dt}_{=0}+\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos(m\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t)dt$

$+\underline{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sin(m\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t)dt}=0$

利用正交, 右边 $=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}a_m\cos(m\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t)dt=\frac{a_m}{2}\cdot T$

$\therefore a_m=a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt$

同理可求 b_n

性质: $a_n=a_{-n}$, $b_n=-b_{-n}$, $-n$为数学上分析用

同频合成 $A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t-\arctan\frac{B}{A})$ $A>0,B>0$

$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(n\omega_1 t-\arctan\frac{b_n}{a_n})$

$=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot\cos(n\omega_1 t-\varphi_n)$

$C_0=a_0$, $C_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $\varphi_n=\arg\frac{b_n}{a_n}$ (见复变)

$=\begin{cases}\arctan\frac{b_n}{a_n} & a_n>0 \text{ 一四象限}\\ \pi+\arctan\frac{b_n}{a_n} & \text{二象限}\\ \arctan\frac{b_n}{a_n}-\pi & \text{三象限}\end{cases}$

△指数形式

$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)$

$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}(e^{jn\omega_1 t}+e^{-jn\omega_1 t})+\frac{b_n}{2j}(e^{jn\omega_1 t}-e^{-jn\omega_1 t})$

$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_1 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega_1 t}\right)$

令 $F(n\omega_1)=\frac{a_n-jb_n}{2}$，$F(-n\omega_1)=\frac{a_n+jb_n}{2}$

$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}F(n\omega_1)\cdot e^{jn\omega_1 t}+\sum_{n=-\infty}^{-1}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$

$n=0$ 时令 $F(0)=a_0$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$，记 $F(n\omega_1)=F_n$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$

$F_n=\frac{a_n-jb_n}{2}$，$a_n.b_n$ 求法见前

可化简得 $F_n=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$ 复数

同时，$F_n=|F_n|\cdot e^{j\varphi_n}$

偶函数 $|F_n|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\frac{1}{2}C_n$　　$F_n=\frac{a_n}{2}+j\cdot(-\frac{b_n}{2})$

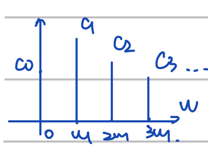
奇函数 $\varphi_n=$ … 见上

$$\begin{cases}F_n+F_{-n}=a_n\\ j(F_n-F_{-n})=b_n\end{cases}$$

△单边幅度谱和相位谱

$f(t)=C_0+C_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+C_2\cos(2\omega_1 t+\varphi_2)+\dots+C_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$

↑ 基波（一次谐波）$\omega_1.C_1.\varphi_1$　　↑ 二次谐波 $2\omega_1.C_2.\varphi_2$　　↑ n次谐波 $n\omega_1, C_n.\varphi_n$



单边幅度谱（离散谱）

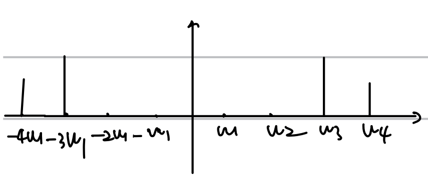
△双边幅度谱和相位谱

$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$　　（能量不变）

幅度谱

给出三角，可先画单边，再画双边。同时 $|F_n|$ 变为一半

F_0 不变



相位谱：奇函数

△谱线特性

谱线间距 $=\frac{2\pi}{T}$　离散谱

$T\to\infty$，连续谱，非周期信号

带宽

△傅里叶系数与函数奇偶性

奇函数 $\Rightarrow a_n=0$

偶函数 $\Rightarrow b_n=0$

奇谐函数 $f(t)=-f(t\pm\frac{T}{2})$

性质：只有奇次谐波 1,3,5…，偶次谐波均为0

若一信号去除了直流分量后为奇谐函数，则只含有奇次谐波与直流

偶谐函数（选比最小正周期大的周期）

性质：只有偶次谐波

△傅里叶变换

$T\to\infty$，$\omega=\frac{2\pi}{T}\to 0$，连续谱，各频率分量幅度→无穷小

频谱密度 $F(\omega)=\lim_{T\to\infty}F_n\cdot T_1=\lim_{\omega_1\to 0}F_n\cdot\frac{2\pi}{\omega_1}$　$F(j\omega)$

（单位频带宽度的频谱值）

$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cdot e^{-jn\omega_1 t}dt$

$F_nT_1=\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cdot e^{-jn\omega_1 t}dt$　　$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$，$T_1\to\infty\Rightarrow\omega_1\to 0$　∴ $n\omega_1$ 连续　记 $n\omega_1=\omega$

$T_1\to\infty$，$F(\omega)=\lim_{T_1\to\infty}F_nT_1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$（正变换）

同时，$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{j\omega_1 nt}$

$=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\cdot T_1\cdot e^{j\omega_1 nt}$

令 $T_1\to\infty$，右边 $=\frac{2\pi}{T_1}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}$　无穷小，令其为 $d\omega$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$（逆变换）

符号 $\mathscr{F}$ 正变换 $\mathscr{F}[f(t)]$

$\mathscr{F}^{-1}$ 逆变换 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$ → 复函数.

$F(\omega)=|F(\omega)|\cdot e^{j\varphi(\omega)}=R(\omega)+j\cdot X(\omega)$

频谱图:用密度函数表示,连续谱

若F(ω)为实函数,则可画在一张图上

$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ ⇒ f(t)的面积为F(0)

$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,d\omega$ ⇒ F(ω)的面积为2πf(0)

傅里叶变换的条件

$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<\infty$ 绝对可积

△常见信号的傅里叶变换

① $\delta(t)$ $\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$

频谱

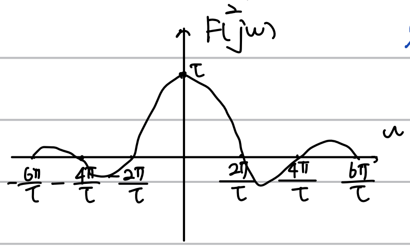
② $\delta'(t)$

$\mathscr{F}[\delta'(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt=-(-j\omega)\cdot 1=j\omega$

③门函数 $g_\tau(t)$ 宽度为τ,高度为1

$\mathscr{F}[g_\tau(t)]=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}\,dt=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}+e^{j\omega\frac{\tau}{2}}}{2j}$

$=\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\cdot\frac{2}{\omega}\cdot\frac{\omega\tau}{2}=\tau\cdot Sa\frac{\omega\tau}{2}$



零点 $\frac{\omega\tau}{2}=m\pi$

$\omega=\frac{2m\pi}{\tau}$

频带宽度 0~第一个零点(用f表示)

∴ $B=\frac{2\pi}{\tau}\cdot\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{\tau}$

④单边指数信号 $e^{-at}\cdot\varepsilon(t)$

$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\cdot\varepsilon(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$

$=\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt$

$=\frac{0-1}{-(a+j\omega)}=\frac{1}{a+j\omega}$

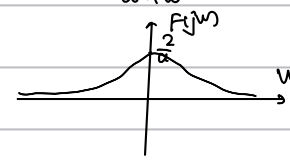
⑤双边指数信号 $f(t)=e^{-a|t|}$

$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{0} e^{at}\cdot e^{-j\omega t}\,dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}\,dt$

$=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{-1}{-a-j\omega}$

$=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}$

$=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$



⑥符号函数 $sgn(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 0 & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$

不绝对可积,不能用定义

令 $f_1(t)=\begin{cases}e^{-at} & t>0\\ -e^{at} & t<0\end{cases}$

a→0时,衰减很慢

∴ $sgn(t)=\lim_{a\to0} f_1(t)$.

$\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{0} -e^{at}\cdot e^{-j\omega t}\,dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}\,dt$

$=\int_{-\infty}^{0} -e^{(a-j\omega)t}\,dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt$

$=\frac{-(1-0)}{a-j\omega}+\frac{0-1}{-(a+j\omega)}$

$=\frac{-1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}$

$=\frac{-a-j\omega+a-j\omega}{a^2+\omega^2}=\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}$

幅度 相位

$\lim_{a\to0}\mathscr{F}[f_1(t)]=\frac{-2j\omega}{\omega^2}=-\frac{2j}{\omega}=\frac{2}{j\omega}=\frac{2}{\omega}\cdot(-j)$

ω>0 相位 $=-\frac{\pi}{2}$ 幅度 $=\frac{2}{\omega}$

$=\frac{\pi}{2}$ $=-\frac{2}{\omega}$

△傅里叶变换的性质

①线性 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2 \longleftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$

②对称性

$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$，则 $F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

例 (1) 常数C　$\delta(t) \longleftrightarrow 1$

则 $1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

由线性 $C \longleftrightarrow 2\pi C\delta(\omega)$

(2) 阶跃信号 $\varepsilon(t)$

$\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} t + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\operatorname{sgn} t + \frac{1}{2} \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

(3) $Sa(t)$　$g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

令 $\tau=2$　$g_2(t) \longleftrightarrow 2Sa(\omega)$

$2Sa(t) \longleftrightarrow 2\pi g_2(-\omega) = 2\pi g_2(\omega)$

$\therefore Sa(t) \longleftrightarrow \pi g_2(\omega)$

(4) t　$\delta'(t) \longleftrightarrow j\omega$

$jt \longleftrightarrow 2\pi\delta'(-\omega) = -2\pi\delta'(\omega)$

$\therefore t \longleftrightarrow 2\pi j \cdot \delta'(\omega)$

(5) $\frac{1}{t}$　$\operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$

$\frac{2}{jt} \longleftrightarrow 2\pi\operatorname{sgn}(-\omega) = -2\pi\operatorname{sgn}(\omega)$

$\therefore \frac{1}{t} \longleftrightarrow -j\pi\operatorname{sgn}(\omega)$

③尺度变换　$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$，则 $f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$

(时域扩展，频域压缩)

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{-j\frac{\omega x}{a}}dx = F(\frac{\omega}{a})$

$a=-1$，$f(-t) = F(-\omega)$ 时域反转，频域反转

例 $Sa(t) \longleftrightarrow \pi g_2(\omega)$

$Sa(at) \longleftrightarrow \frac{\pi}{|a|} g_2(\frac{\omega}{a})$　令宽度为2，ω宽度为2a的门函数

④时移特性

若 $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$，则 $f(t-t_0) \longleftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

$f(at-b) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}e^{-j\frac{b}{a}\omega}\cdot F(\frac{\omega}{a})$

⑤频移特性

$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

则 $f(t)\cdot e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow F(\omega-\omega_0)$

例 求 $e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow ?$

$1\cdot e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow F(\omega-\omega_0)$

$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$\therefore e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

求 $\cos\omega_0 t$

$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$

（$e^{j\omega_0 t} \to 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$，$e^{-j\omega_0 t} \to 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$）

$\cos(\omega_0 t+\varphi) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}\cdot e^{j\varphi} + e^{-j\omega_0 t}\cdot e^{-j\varphi})$

$\longleftrightarrow \pi[\delta(\omega-\omega_0)\cdot e^{j\varphi} + \delta(\omega+\omega_0)\cdot e^{-j\varphi}]$

求 $\sin\omega_0 t$

$\sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \longleftrightarrow \frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)]$

$\sin(\omega_0 t+\varphi) \longleftrightarrow \frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)\cdot e^{j\varphi} - \delta(\omega+\omega_0)\cdot e^{-j\varphi}]$

作用：频谱搬移

⑥卷积定理

$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$，$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$

则 $f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

⑦频域卷积定理

$f_1(t)\cdot f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$

信号在时域和频域上不可能都是有限长的

证：有限长信号 $f(t) = m(t)\cdot \underset{\text{门函数}}{g_\tau(t)}$

频域上　$m(\omega) * \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ 无限长信号

⑧ 时域微分

若 $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

则 $\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$

$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$

使用前提：f(t)中无直流分量

⑨ 时域积分

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $\int_{-\infty}^{t} f(t)dt \longleftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

证 $f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

$F(\omega) \cdot \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

⑩ 频域微分　前提：无直流分量

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

$(-jt) f(t) \leftrightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega}$

$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{dF^n(\omega)}{d\omega^n}$

⑪ 频域积分

$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

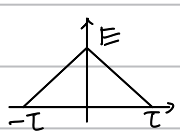
$\pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(\eta)d\eta$

△ 帕塞瓦尔定理

① 功率 $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2$

② 能量 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

常用信号的傅里叶变换

时域	频域
$\delta(t)$	1
$\delta'(t)$	$j\omega$
$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$t\varepsilon(t)$	$j\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$
C	$2\pi C\delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{-at}\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
$g_\tau(t)$	$\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$
三角脉冲 	$E\tau Sa^2(\frac{\omega\tau}{2})$
$Sa(at)$	$\frac{\pi}{a}g_{2a}(\omega)$
t	$2\pi j\delta'(\omega)$
$\frac{1}{t}$	$-j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$
$\cos(\omega_0 t+\varphi)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)\cdot e^{-j\varphi}+\delta(\omega-\omega_0)\cdot e^{j\varphi}]$
$\sin(\omega_0 t+\varphi)$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)\cdot e^{-j\varphi}-\delta(\omega-\omega_0)e^{j\varphi}]$

冲激序列 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_1)$

$$\updownarrow$$

$$\omega_1\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$$

○周期信号的傅里叶变换

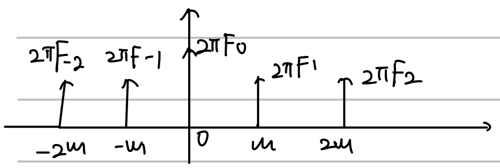
$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_1 t}$

$\mathcal{F}[f_T(t)]=\mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_1 t}]$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot \mathcal{F}[e^{jn\omega_1 t}]$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot 2\pi\delta(\omega-n\omega_0)$

$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cdot \delta(\omega-n\omega_0)$



强度 $=2\pi \cdot F_n$

$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-jn\omega_1 t}dt$ 一个周期的表达式

傅里叶变换：$F_0(\omega)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$

则 $F_n=\frac{1}{T}F_0(n\omega_1)$

$\mathcal{F}[f_T(t)]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n\cdot\delta(\omega-n\omega_1)$

$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}F_0(n\omega_1)\cdot\delta(\omega-n\omega_1)$

$=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_0(n\omega_1)\cdot\delta(\omega-n\omega_1)$

○ $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_1)$ 的傅里叶变换

$\delta(t)\leftrightarrow 1$

$F_0(\omega)=1$

$F_n=\frac{1}{T}F_0(n\omega)=\frac{1}{T}$

$\mathcal{F}[\delta_T(t)]=\frac{2\pi}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$

$=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$

任一周期函数均可表示为与 $\delta_T(t)$ 的卷积

一个周期

$f_T(t)=f(t)*\delta_T(t)$

$\therefore \mathcal{F}[f_T(t)]=F(\omega)\cdot\omega_1\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$

$=\omega_1\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)\cdot\delta(\omega-n\omega_1)$

△傅里叶分析应用于通信系统

①系统函数

卷积特性：时域卷积、频域乘积

$x(t) * h(t) = y_{zs}(t)$

↓傅里叶变换

系统函数

$X(j\omega) \cdot \underline{H(j\omega)} = Y_{zs}(j\omega)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$ 系统稳定的定义

$H(j\omega) = \frac{Y_{zs}(j\omega)}{X(j\omega)} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\varphi\omega}$ 复函数

$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$\delta(t) \longleftrightarrow 1$

$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$

$g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

$sgn(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$

△抽样定理

$f(t)\cdot\delta(t-t_0) = f(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$ (取样)

$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$

$f(t)\cdot\delta_T(t)$ 即实现抽样

T_s: 采样周期

$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$

△$f(t)\cdot p(t)$ 的傅里叶变换

$p(t)\Longleftrightarrow P(w)=w_s\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w-nw_s)$

$f(t)\longleftrightarrow F(w)$

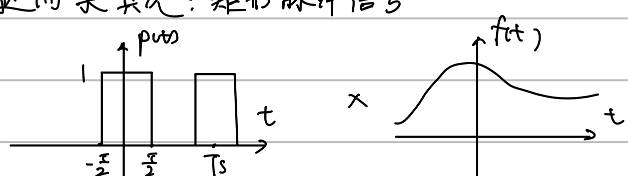
$f(t)\cdot p(t) = \frac{w_s}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(w-nw_s)$

△抽样 $f(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(nT)\cdot\delta(t-nT)$

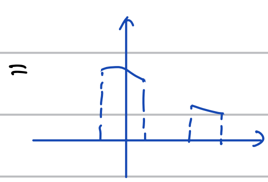
搬移 $f(t)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t-nT)$

△现实中无法做到冲激函数

退而求其次：矩形脉冲信号



=



$f(t)\cdot p(t)$ 的傅里叶变换

$f(t)\Longleftrightarrow F(jw)$

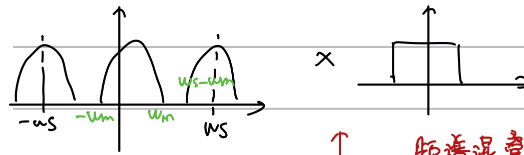
$p(t)\longleftrightarrow E\tau w_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{nw_1\tau}{2})\delta(w-nw_1)$

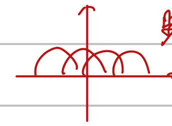
$F(jw)*P(jw)=E\tau w_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{nw_1\tau}{2})F(w-nw_1)$

$\therefore f(t)\cdot p(t)\Longleftrightarrow\frac{1}{2\pi}E\tau w_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{nw_1\tau}{2})F(w-nw_1)$

$=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{nw_1\tau}{2})F(w-nw_1)$

△信号的恢复





频谱混叠

前提：波形无交集

条件：$w_m < w_s - w_m$

$w_s > 2w_m$ 可恢复，w_m 需是有限值

$\Rightarrow w_m$ 需是有限长信号 频带有限

$w_s=2w_m$ 时，有时能恢复，有时不能恢复

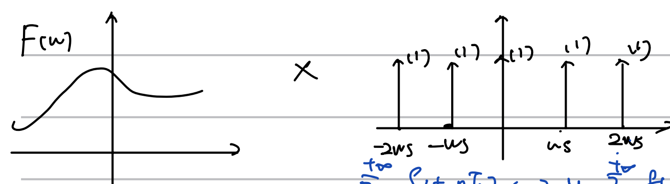
△奈奎斯特抽样定理

$w_s > 2w_m$ ($f_s>2f_m$, $T_s<\frac{1}{2f_m}$) 时能还原信号

$f_s=2f_m$ (奈奎斯特频率)

$T_s=\frac{1}{2f_m}$ (奈奎斯特间隔)

△频域抽样定理



$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_1)\Longleftrightarrow w_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w-nw_1)$

$\frac{1}{w_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_1)\Longleftrightarrow\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w-nw_1)$

逆变换

$T_s-t_m>t_m$

$T_s>2t_m$

△DFS、DTFT、DFT

①DFS 离散傅里叶级数

$f(nT) \xrightarrow{T=1} f(n)$ 采样，序列也是周期的

$C_n = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_N(k) e^{-jn\frac{2\pi}{N}k}$

$C_n = \frac{1}{N} F_N(n)$

△系统对正弦信号的响应

对复指数信号的响应

$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

$= e^{j\omega t}\cdot H(j\omega) = e^{j\omega t}\cdot |H(j\omega)|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$

$=|H(j\omega)|\cdot e^{j(\omega t+\varphi(\omega))}$

输入为$e^{-j\omega t}$时，$y(t)=e^{-j\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau = e^{-j\omega t}\cdot H(-\omega)$

$= e^{-j\omega t}\cdot |H(-\omega)|\cdot e^{j\varphi(-\omega)}$

$=|H(-j\omega)|\cdot e^{-j(\omega t-\varphi(-\omega))}$

$e^{j\omega_0 t}$ 对应响应 $|H(j\omega_0)|\, e^{j[\omega_0 t+\varphi(\omega)]}$

$e^{-j\omega_0 t}$ 对应响应 $|H(-j\omega_0)|\, e^{-j[\omega t-\varphi(-\omega)]}$

例 $f(t)=e^{j(2t+\frac{\pi}{6})}$ 通过 $h(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$ 的 $y_{zs}(t)$

$H(\omega)=\frac{1}{j\omega+2}$，$f(t)=e^{2jt}\cdot e^{\frac{\pi}{6}j}$

$\therefore y_{zs}(t)=\left|\frac{1}{2j+2}\right|\cdot e^{2jt}\cdot e^{\frac{\pi}{6}j}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}j}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\, e^{2jt}\cdot e^{-\frac{\pi}{12}j}$

△对三角函数的响应。

$A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=\frac{A}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+\varphi_0)}+e^{-j(\omega_0 t+\varphi_0)}\right]$

$=\frac{A}{2}e^{j\varphi_0}\cdot e^{j\omega_0 t}+\frac{A}{2}\cdot e^{-j\varphi_0}\cdot e^{-j\omega_0 t}$

响应：$\frac{A}{2}|H(j\omega_0)|\, e^{j\varphi_0}e^{j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}+\frac{A}{2}|H(-j\omega_0)|\, e^{-j\varphi_0}e^{-j[\omega_0 t-\varphi(-\omega_0)]}$

实信号$h(t)$：$|H(\omega)|=|H(-\omega)|$，$\varphi(-\omega)=-\varphi(\omega)$

$=\frac{A}{2}|H(j\omega)|\, e^{j\varphi_0}e^{j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}+\frac{A}{2}|H(j\omega_0)|\, e^{-j\varphi_0}e^{-j[\omega t+\varphi(\omega_0)]}$

$=\frac{A}{2}|H(j\omega_0)|\cdot 2\cos[\omega_0 t+\varphi_0+\varphi(\omega_0)]$

$=A|H(j\omega_0)|\cdot\cos[\omega_0 t+\varphi_0+\varphi(\omega_0)]$ 稳态响应与零状态响应

$A\sin(\omega_0 t+\varphi_0)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0-\frac{\pi}{2})$

响应：$A\cdot|H(j\omega_0)|\cdot\cos[\omega_0 t+\varphi_0-\frac{\pi}{2}+\varphi(\omega_0)]$

$=A|H(j\omega_0)|\cdot\sin[\omega_0 t+\varphi_0+\varphi(\omega_0)]$ 一样

例 $H(\omega)=\frac{4}{2+j\omega}$，$f(t)=3\sin 2t$，求稳态响应$r_{ss}(t)$

$\omega=2$，$H(\omega)=\frac{2}{1+j}$，$|H(\omega)|=\sqrt{2}$，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$

$\therefore r_{ss}(t)=3\sqrt{2}\sin(2t-\frac{\pi}{4})$

△$H(s)$与正弦稳态响应。

输入 $f(t)=A\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$。

$F(s)=A\cdot\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

$Y_{zs}(s)=H(s)\cdot A\cdot\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

$Y_{zs}(s)=\frac{K_{j\omega_0}}{s+j\omega_0}+\frac{K_{j\omega_0}}{s-j\omega_0}+\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}$

$K_{j\omega_0}=R(s)\cdot(s-j\omega_0)|_{s=j\omega_0}$

$=\frac{A}{2j}H(j\omega_0)$

$=\frac{A|H(j\omega_0)|\cdot e^{j\varphi_0}}{2j}=\frac{A|H(j\omega_0)|e^{j(\varphi_0-\frac{\pi}{2})}}{2}$

$K_{-j\omega_0}=\frac{A|H(j\omega_0)|e^{-j(\varphi_0-\frac{\pi}{2})}}{2}$

求拉氏逆变换

稳态响应。

$y_{zs}(t)=\underline{A|H_0(j\omega_0)|\sin[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]\varepsilon(t)}+(\_\_\_)\varepsilon(t)$

△$H(z)$与正弦稳态响应。

类似 $A\sin(n\omega_0 t+\varphi_0)\cdot\varepsilon(n)$

稳态响应 $A|H(e^{j\omega_0})|\sin[n\omega_0 t+\varphi_0+\varphi(\omega_0)]\varepsilon(n)$

例 $H(z)=0.5+0.5z^{-1}$

$f(n)=5\cos(\frac{n\pi}{2})$ 求 $y_{ss}(n)$

$H(e^{j\omega})=0.5+0.5e^{-j\omega}$

$\omega_0=\frac{\pi}{2}$ $H(e^{j\omega})=0.5+0.5e^{-\frac{\pi}{2}j}=0.5-0.5j$

$|H(e^{j\omega})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ 稳态响应 $y_{ss}(n)=\frac{5}{2}\sqrt{2}\cos(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$