第二章 连续系统的时域分析

2.1 冲激响应、阶跃响应

① 冲激响应：$\delta(t)$ 所引起的零状态响应

$h(t) = T[\{0\}, \delta(t)]$

② 阶跃响应 $\varepsilon(t)$ 所引起的零状态响应

$g(t) = T[\{0\}, \varepsilon(t)]$

$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$，则 $h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$

$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau$

$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$

定义卷积积分：$(-\infty, +\infty)$ 上 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$

$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$ 为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 卷积积分

记为 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$

$y_{zs}(t) = f(t) * h(t)$ ← 反映了系统的基本属性

△ 连续卷积 $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$

性质：

$f(t) * \delta(t) = f(t)$　左边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = f(t) = f(t)$
($f(t)$ 的定义)

$f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$

$f(t) * \delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)$

$f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$ → 做一次变上限积分

$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = t\varepsilon(t)$　　$f(t) * t\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\eta} f(\lambda)\,d\lambda\,d\eta$

△ 离散卷积和 $f_1(n) * f_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m) f_2(n-m)$

性质：$f(n) * \delta(n) = f(n)$

$f(n) * \delta(n-n_0) = f(n-n_0)$

$f(n) * \varepsilon(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} f(m)$

$\varepsilon(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$

△ 卷积的时移特性

若 $f_1(t) * f_2(t) = g(t)$

则 $f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = g(t-t_1-t_2)$

证明 $f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2)$

$= f_1(t) * \delta(t-t_1) * f_2(t) * \delta(t-t_2)$

$= g(t) * \delta(t-t_1-t_2)$

$= g(t-t_1-t_2)$

卷积存在的条件 ① 两信号都有始或都有终

② 其中一信号是时限的

△ 微积分性质

若 $f_1(t) * f_2(t) = f(t)$

则 ① $f_1(t) * f_2'(t) = f'(t)$

② $f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$

③ $f_1'(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\,d\tau = f(t)$

④ $f_1^{(k)}(t) * f_2^{(-r)}(t) = f^{(k-r)}(t)$

条件：求导的函数在 $-\infty$ 处为 0

或积分的函数在 $-\infty$ 至 $+\infty$ 上积分为 0

△ 尺度变换性质

$f_1(t) * f_2(t) = f(t)$

则 $f_1(at) * f_2(at) = \frac{1}{|a|} f(t)$

△求解全响应

①经典解 | 齐次解
　　　　| 特解

②零输入+零状态

求解方法见书

△0^-与0^+值

$y(0^+)$与$y'(0^+)$ 在$f(t)$作用下的输出

$y(0^-)$与$y'(0^-)$ 无输入条件下的输出

待定系数法

例 $y''(t)+2y'(t)+y = f''(t)+2f(t)$， $f(t)=\delta(t)$

解 设 $y''(t)= a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_0(t)$

积分 $y'(t)= a\delta'(t)+b\delta(t)+c\varepsilon(t)+r_1(t)$

$r_0(t)$中不含冲激 $\Longleftrightarrow$ $r_1(t)$中不含跳变

积分 $y(t)=a\delta(t)+b\varepsilon(t)+r_2(t)$ 合并对$c\varepsilon(t)+r_1(t)$的积分

代入得 $a\delta''(t)+(2a+b)\delta'(t)+(c+2b+a)\delta(t)+[\ \ ]=\delta''(t)+2\delta(t)$

$$\therefore \begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ c+2b+a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=5 \end{cases}$$

$\therefore y''(t)=\delta''(t)-2\delta'(t)+5\delta(t)+r_0(t)$ ☆

积分

$y'(0^+)=y'(0^-)+y'(t)$在0处变化值

$y'(t)=\delta'(t)-2\delta(t)+\boxed{5\varepsilon(t)}+r_1(t)$ 跳变值

$\therefore y'(0^+)=y'(0^-)+5=4$ 跳变值

$y(t)=\delta(t)\boxed{-2\varepsilon(t)}+r_2(t)$

$\therefore y(0^+)=y(0^-)-2=-1$

△零输入响应：和齐次解形式一样，含有未知数，但代入$y(0^-)$与$y'(0^-)$可求

△ $y(0^+)-y(0^-)$， $y'(0^+)-y'(0^-)$ 可用于求解零状态响应

$y(0^+)$， $y'(0^+)$ 可求全响应

$y(0^-)$， $y'(0^-)$ 可求零输入响应

全响应=零输入+零状态

△ 零输入响应 (y_{zi})

与求齐次解步骤相同，并代入$y(0^-)$，$y'(0^-)$

应有，$y_{zi}(0^-)=y_{zi}(0^+)$

△零状态响应

全响应=齐次解+特解

零状态响应=零状态齐次解+零状态特解

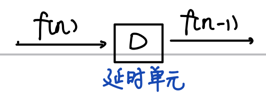
齐次解=零状态齐次+零输入

总结 $y(t)$=齐次解+特解

$=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$齐次解$+y_{zs}(t)$特解

$=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$

△差分方程



△差分方程的时域求解

齐次解 $a_0 y(n)+a_1 y(n-1)+\dots+a_N y(n-N)=0$

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_N = 0$$

△零输入响应：任意初始条件都可以

零状态响应：$y_{zs}(0)$, $y_{zs}(1)$ 等等

△单位样值响应

输入 = $\delta(n)$ 时零状态响应

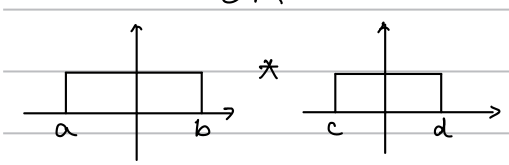
齐次解法：$h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$

适用于右端为 $\delta(n)$ 的移位的线性组合

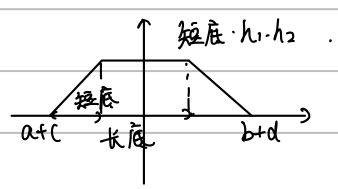
令 $h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)$ 求得后

由线性和时不变性求输出

△两矩形信号卷积



=



△有限长序列的卷积

对位相乘

$\{1\ 2\ \underset{k=0}{\underset{\uparrow}{0}}\ 1\}$

$\{1\ \underset{k=0}{\underset{\uparrow}{3}}\ 1\}$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 2 & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 2 & 0 & 1 \\
 & 3 & 6 & 0 & 3 & \\
1 & 2 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & 5 & 7 & \underset{k=0}{\underset{\uparrow}{3}} & 3 & 1
\end{array}$$

左端点 $k=-3$

右端点 $k=2$