第五章 z变换

△抽样 $x_s(t)=x(t)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\,\delta(t-nT)$

$\delta(t-nT)\leftrightarrow e^{-nTs}$

$X_s(s)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\,e^{-nTs}$

令 $z=e^{sT}$

$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\,z^{-n}$

令$T=1$ $=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)\,z^{-n}$ (单边z变换)

$X(z)=\mathcal{Z}[x(n)]$

△ s平面与z平面映射关系

$z=e^{sT}$ | $s=\sigma+j\omega$ 直角坐标

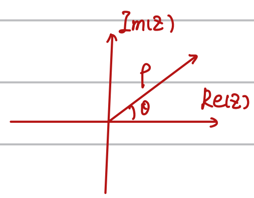
$s=\frac{1}{T}\ln z$ | $z=\rho\cdot e^{j\theta}$ 极坐标

$\rho\cdot e^{j\theta}=e^{(\sigma+j\omega)T}$

$\rho\cdot e^{j\theta}=e^{\sigma T}\cdot e^{j\omega T}$

$\therefore \rho=e^{\sigma T}$

$\theta=\omega T$



1° 左半平面 $\sigma<0$, $\rho=e^{\sigma T}<1$, θ任意

(单位圆内部)

2° 右半平面 $\sigma>0$ (单位圆外部)

3° 虚轴 $\sigma=0$ (单位圆上)

4° 实轴 $\omega=0$ $\theta=\omega t=0$ (正实轴)

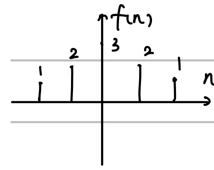
5° 原点 $\sigma=0, \omega=0$ $\rho=1, \theta=0$ (1,0) 矢量

△常用z变换及收敛域

①有限长序列

(1) $\delta(n)$

$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(n)\cdot z^{-n}=1$ (全平面收敛)



$F(z)=\underbrace{z^2+2z}_{|z|<\infty}+3+\underbrace{\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}}_{|z|>0}$

$n<0$时有非零值⇒收敛域不包含∞

$n>0$时有非零值⇒收敛域 $|z|>0$

②因果序列z变换

$f_1(n)=a^n\cdot\varepsilon(n)$ 收敛域 $\left|\frac{a}{z}\right|<1\Rightarrow |z|>|a|$

$F_1(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^n\cdot\varepsilon(n)\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{z}{z-a}$

③反因果序列

$f_2(n)=b^n\cdot\varepsilon(-n-1)$ 收敛域 $\left|\frac{z}{b}\right|<1\Rightarrow |z|<|b|$

$F_2(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b^n\varepsilon(-n-1)\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{b}{z}\right)^n\overset{令n=-m}{=}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^{-m}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^m$

$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^m-1=\frac{1}{1-\frac{z}{b}}-1=\frac{z}{b-z}$

性质, $f(n)\cdot\varepsilon(n)$与$-f(n)\cdot\varepsilon(-n-1)$ 双边z变换形式相同,但收敛域相反

④双边 $f(n)=\underbrace{b^n\varepsilon(-n-1)}_{|z|<|b|}+\underbrace{a^n\varepsilon(n)}_{|z|>|a|}$ $|a|<|z|<|b|$ 时z变换存在

△z变换的性质

①线性

$a_1f_1(n)+a_2f_2(n)\leftrightarrow a_1F_1(z)+a_2F_2(z)$

收敛域: 至少是相交部分

$\varepsilon(n)\cdot\cos(\beta n)=\left(\frac{e^{j\beta n}+e^{-j\beta n}}{2}\right)\varepsilon(n)$

$\leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\beta}}+\frac{z}{z-e^{-j\beta}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{z(z-e^{-j\beta})+z(z-e^{j\beta})}{(z-e^{j\beta})(z-e^{-j\beta})}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2z^2-z(e^{-j\beta}+e^{j\beta})}{z^2-ze^{-j\beta}-ze^{j\beta}+1}$

$=\frac{z^2-z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$

$\varepsilon(n)\cdot\sin(\beta n)=\frac{e^{j\beta n}-e^{-j\beta n}}{2j}\varepsilon(n)$

$\leftrightarrow\frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\beta}}-\frac{z}{z-e^{-j\beta}}\right)$

$=\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$

② 移位特性

双边 $f(n) \leftrightarrow F(z)$

则 $f(n+m) \leftrightarrow z^m \cdot F(z)$

单边 $f(n) \leftrightarrow F(z)$

$f(n+m) \longleftrightarrow z^m \left[F(z) - \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} f(n) \cdot z^{-n}}_{\text{移位后}\geq 0\text{部分}} \right]$

$f(n-m) \leftrightarrow z^{-m} \left[F(z) - \sum_{n=-m}^{-1} f(n) \cdot z^{-n} \right]$

对因果序列，单边=双边

③ z域尺度变换

$f(n) \leftrightarrow F(z) \quad \alpha < |z| < \beta$

则 $a^n f(n) \leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right) \quad |a|\alpha < |z| < |a|\beta$

$(-1)^n f(n) \leftrightarrow F(-z)$

④ z域微分

$f(n) \leftrightarrow F(z) \quad \alpha < |z| < \beta$

$n f(n) \leftrightarrow -z \cdot \frac{dF(z)}{dz}$

$n^m f(n) \leftrightarrow \left[-z \frac{d}{dz} \right]^m F(z)$

⑤ 时域卷积定理

$f_1(n) \leftrightarrow F_1(z) \quad \alpha_1 < |z| < \beta_1$

$f_2(n) \leftrightarrow F_2(z) \quad \alpha_2 < |z| < \beta_2$

$f_1(n) * f_2(n) \leftrightarrow F_1(z) \cdot F_2(z)$ 收敛域至少为相交部分

⑥ 初值定理

若 $f(n)$ 为因果序列，则 $f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$

⑦ 终值定理

若 $f(n)$ 为因果序列，则 $f(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1)F(z)$

前提：$F(z)$ 极点位于单位圆内，或在单位圆上 (± 1) 处且为一阶极点

⑧ 时域反转

$f(n) \leftrightarrow F(z) \quad \alpha < |z| < \beta$

则 $f(-n) \leftrightarrow F\left(\frac{1}{z}\right) \quad \frac{1}{\beta} < |z| < \frac{1}{\alpha}$

⑨ 共轭

$f(n) \leftrightarrow F(z)$

$f^*(n) \leftrightarrow F^*(z^*)$

⑩ z域积分

若 $f(n) \leftrightarrow F(z)$

则 $\frac{f(n)}{n+m} \leftrightarrow z^m \int_z^{+\infty} \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta \quad \alpha < |z| < \beta$

常用序列的z变换

$\delta(n)$	1	
$\varepsilon(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
$a^n\varepsilon(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert>a$
$n\varepsilon(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert>1$
$\frac{n(n-1)}{m!}\varepsilon(n)$	$\frac{z}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert>1$
$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\varepsilon(n)$	$\frac{z}{(z-1)^{m+1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$\frac{1}{a^m}\cdot a^n\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\cdot\varepsilon(n)$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$\lvert z\rvert>a$
$e^{jn\omega_0}\varepsilon(n)$	$\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}$	$\lvert z\rvert>1$
$\sin(n\omega_0)\varepsilon(n)$	$\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$\cos(n\omega_0)\varepsilon(n)$	$\frac{z^2-z\cos\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$-\varepsilon(-n-1)$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert<1$
$-n\varepsilon(-n-1)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert<1$

△逆z变换

△部分分式展开法

$F(z) \to \frac{F(z)}{z}$，再乘z，部分分式展开

需使用的常用变换对

$\delta(n) \leftrightarrow 1$

$\delta(n+k) \leftrightarrow z^k$

$a^n \varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$

$F(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-2)}$

(1) $|z|>2$

$\frac{F(z)}{z} = \frac{z}{(z+1)(z-2)} = \frac{\frac{1}{3}}{z+1} + \frac{\frac{2}{3}}{z-2}$

$\therefore F(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z-2}$

$|z|>2$，因果 $f(z) = \frac{1}{3}\cdot(-1)^n \varepsilon(n) + \frac{2}{3}\cdot 2^n \varepsilon(n)$

(2) $|z|<1$

$|z|<1$，反因果 $f(z) = -\frac{1}{3}(-1)^n \varepsilon(-n-1) - \frac{2}{3}\cdot 2^n \varepsilon(-n-1)$

(3) $1<|z|<2$

一项因果，一项反因果 $f(z) = \frac{1}{3}(-1)^n \varepsilon(n) - \frac{2}{3} 2^n \varepsilon(-n-1)$

△共轭复根

$\cos(n\omega_0)\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z^2 - z\cos\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$

$\sin(n\omega_0)\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z\sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$

例 $F(z) = \frac{z^2}{z^2+\sqrt{2}z+1}$

$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2z\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 1}$ $\omega_0 = \frac{3}{4}\pi$

$= \frac{z^2+\frac{\sqrt{2}}{2}z}{z^2+\sqrt{2}z+1} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}z}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$

$\therefore f(n) = [\cos(\frac{3}{4}\pi n) - \sin(\frac{3}{4}\pi n)]\,\varepsilon(n)$

△含重根

$\frac{F(z)}{z}$ 后，与Laplace相同

例 $F(z) = \frac{z^3+z^2}{(z-1)^3}$

$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{k_{11}}{(z-1)^3} + \frac{k_{12}}{(z-1)^2} + \frac{k_{13}}{z-1}$

$k_{11} = (z^2+z)|_{z=1} = 2$

$k_{12} = (2z+1)|_{z=1} = 3$

$k_{13} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

$\therefore F(z) = \frac{2z}{(z-1)^3} + \frac{3z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}$

$\quad\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$2n(n-1)\varepsilon(n) \quad 3n\varepsilon(n) \quad \varepsilon(n)$

△z变换求解差分方程

$y(n) - y(n-1) - 2y(n-2) = f(n) + 2f(n-2)$

$y(-1) = 2,\ y(-2) = -\frac{1}{2},\ f(n) = \varepsilon(n)$

取单边z变换

$Y(z) - [z^{-1}Y(z) + y(-1)] - 2[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)]$

$= F(z) + 2[z^{-2}F(z) + z^{-1}\overset{=0}{f(-1)} + z^{-2}\overset{=0}{f(-2)}]$

$\therefore (1 - z^{-1} - 2z^{-2})Y(z) - y(-1) - 2z^{-1}y(-1) - 2y(-2)$

$= F(z) + 2z^{-2}F(z)$

$Y(z) = \underbrace{\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}F(z)}_{Y_{zs}(z)} + \underbrace{\frac{y(-1)+2z^{-1}y(-1)+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}}_{Y_{zi}(z)}$

△极点与收敛域的关系

因果序列，z变换收敛域在某圆外的区域，圆最大的圆周外

反...   最小圆..

△稳定性

充要条件: H(z)极点都在单位圆内 (因果系统)

一般情况: 稳定的充要条件为H(z)收敛域包含单位圆

△离散系统的频率响应

$H(z)|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})$ — 频率响应函数 (DTFT)

$$H(z)=\frac{b_m\prod_{j=1}^{m}(z-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}=\frac{b_m\cdot\prod_{j=1}^{m}(e^{j\omega}-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(e^{j\omega}-p_i)}$$

$$=\frac{b_m\cdot B_1B_2\cdots B_m}{A_1A_2\cdots A_n}\cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m-\theta_1\theta_2-\cdots-\theta_n)}$$

2π为一周期,研究一周期即可

例: $Y(z)=\frac{1}{2z}X(z)+\frac{1}{2}X(z)$

$$H(z)=\frac{1}{2z}+\frac{1}{2}=\frac{z+1}{2z}$$

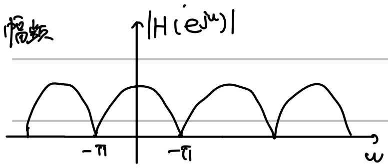
① 代数法

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}+1}{2e^{j\omega}}$$

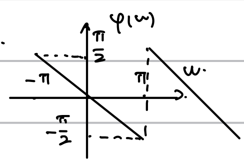
$$|H(e^{j\omega})|=|\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}|=\tfrac{1}{2}|e^{j0}+e^{-j\omega}|=\tfrac{1}{2}|e^{-\frac{j\omega}{2}}\cdot(e^{\frac{j\omega}{2}}+e^{-\frac{j\omega}{2}})|$$

$$=\tfrac{1}{2}|e^{-\frac{j\omega}{2}}|\cdot|\cos(\tfrac{\omega}{2})|=\tfrac{1}{2}|\cos\tfrac{\omega}{2}|$$

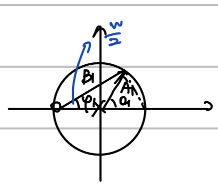
幅频



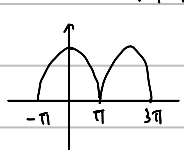
相频.



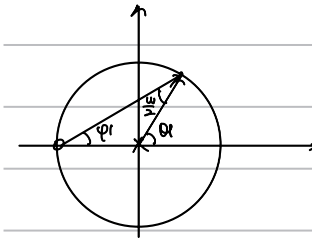
② 几何法



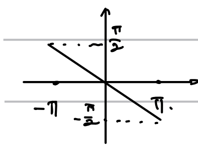
幅频. $b_m=\frac{1}{2}$, $A_1=1$. $B_1=2\cos\frac{\omega}{2}$, $|H(e^{j\omega})|=|\cos\frac{\omega}{2}|$



相频



$\varphi(\omega)=\varphi_1-\theta_1=-\frac{\omega}{2}$



判断滤波器: 看(-π, π)范围