第四章 Laplace 变换

△ 总览

def $H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cdot e^{-st}\,dt$

其中 $s=\sigma+j\omega$

双边拉氏变换

$H(s)=\mathcal{L}[h(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\cdot e^{-st}\,dt$ Laplace变换

Laplace逆变换

def $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega}F(s)\cdot e^{st}\,dt$ (一般不用)

△ Laplace变换与Fourier变换的区别与联系

Fourier变换：需满足绝对可积条件，t→∞时为有限值

$e^{at}\cdot\varepsilon(t)$ $(a>0)$，$t\to\infty$ 时为无限值，无法做Fourier变换

可以做Laplace变换

Fourier变换：只能求 y_{zs}

Laplace变换：y_{zi}, y_{zs}

Fourier变换：意义清晰

Laplace变换：做分析用 (电路系统)

$\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$

$\mathcal{L}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\boxed{e^{-\sigma t}}\,e^{-j\omega t}\,dt$ 衰减因子

σ满足一定条件，Laplace变换存在 — 收敛域

△收敛域

① 因果信号的收敛域

$f(t)=e^{\alpha t}\cdot\varepsilon(t)$

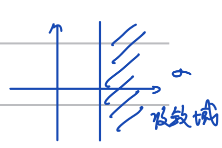
$F_1(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\alpha t}\cdot e^{-st}\cdot\varepsilon(t)\,dt$

$=\int_{0}^{+\infty}e^{(\alpha-s)t}\,dt$

$=\frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\alpha-s}\cdot[\lim_{t\to\infty}e^{(\alpha-s)t}-1]$

$=\frac{1}{\alpha-s}[\lim_{t\to\infty}e^{(\alpha-\sigma-j\omega)t}-1]$

$=\frac{1}{\alpha-s}[\lim_{t\to\infty}e^{(\alpha-\sigma)t}\cdot\underbrace{e^{-j\omega t}}_{振荡}-1]$



σ>α 原式 $=\frac{1}{s-\alpha}$

σ=α 振荡 结果不定

σ<α 无界

② 反因果信号的收敛域

$f(t)=e^{\beta t}\cdot\varepsilon(-t)$

$\mathcal{L}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\beta t}\cdot\varepsilon(-t)\cdot e^{-st}\,dt$

$=\int_{-\infty}^{0}e^{(\beta-s)t}\,dt=\frac{1}{\beta-s}\cdot e^{(\beta-s)t}\Big|_{-\infty}^{0}$

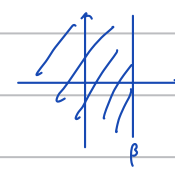
$=\frac{1}{\beta-s}\cdot[1-\lim_{t\to-\infty}e^{(\beta-\sigma)t}\cdot e^{-j\omega t}]$

$\beta-\sigma>0$ σ<β时 原式 $=\frac{1}{\beta-s}$

$\beta-\sigma=0$ σ=β时 不定

$\beta-\sigma<0$ σ>β时 无界

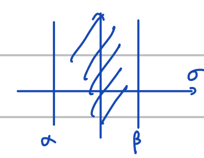
收敛域



③ 双边信号的收敛域

$f(t)=f(t)\cdot\varepsilon(t)+f(t)\cdot\varepsilon(-t)$

收敛域



△ 单边拉氏变换 $F(s)=\int_{0_-}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-st}\,dt$

(相当于对因果信号作双边拉氏变换) $=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{f(t)\cdot\varepsilon(t)}_{因果信号}\cdot e^{-st}\,dt$

△拉氏逆变换
- 双边 需考虑收敛域
- 单边 无需考虑收敛域

△常用信号的拉氏变换

(单边：需写出收敛域 双边：无需写出收敛域)

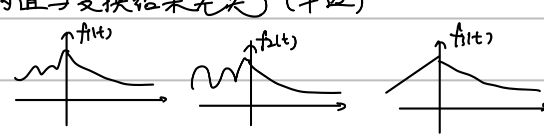
① $\varepsilon(t)$

单边：$\mathcal{L}[\varepsilon(t)]=\int_{0}^{+\infty}\varepsilon(t)\cdot e^{-st}\,dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-st}\,dt=\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}$ $(\sigma>0)$

② 指数信号 e^{-at}

$\mathcal{L}[e^{-at}]=\int_{0}^{+\infty}e^{(-a-s)t}\,dt=-\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a+s}$ $(\sigma>-a)$

($t<0$ 的值与变换结果无关) (单边)



$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 单边Laplace变换结果相同

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{a+s}]=e^{-at}$ $(t\geq 0)$ $t<0$ 时无法确定

△ 规定 单边Laplace变换积分下限从 0^- 开始

$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt$

③冲激信号 $\delta(t)$

$\mathcal{L}[\delta(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)\cdot e^{-st}\,dt=1$

△拉氏变换的性质

(1)线性 若 $\mathcal{L}[f_1(t)]=F_1(s)$，$\mathcal{L}[f_2(t)]=F_2(s)$

则 $\mathcal{L}[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]=k_1F_1(s)+k_2F_2(s)$ 对单双边拉氏变换均成立

④ 求 $\mathcal{L}(\sin\omega t)$

$\sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$

$\mathcal{L}(e^{j\omega t})=\frac{1}{s-j\omega}$，$\mathcal{L}[e^{-j\omega t}]=\frac{1}{s+j\omega}$

$\therefore \mathcal{L}[\sin\omega t]=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{2j}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

⑤ $\mathcal{L}[\cos\omega t]$

$\cos\omega t=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$

$[\cos\omega t]=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$

(2)微分特性 若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$

则 $\frac{df(t)}{dt}\leftrightarrow sF(s)-f(0^-)$ (单边)

$\frac{d^2f(t)}{dt^2}\leftrightarrow s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$

$\frac{d^nf(t)}{dt^n}\leftrightarrow s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}f'(0^-)-\dots-f^{(n-1)}(0^-)$

$\frac{d^nf(t)}{dt^n}=s^nF(s)$ (双边)

⑥ 求 $\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)]$

$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)]=s^n\cdot 1-s^{n-1}\cdot\overset{=0}{\delta^{(n)}(0^-)}-s^{n-2}\cdot\overset{=0}{\delta^{(n+1)}(0^-)}-\dots-s\cdot\overset{=0}{\delta^{(2n-1)}(0^-)}$

$=s^n$

(3)积分特性 若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$

则 $\int_{-\infty}^{t}f(t)\,dt\leftrightarrow\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0)}{s}$ (单边)

$\frac{1}{n!}\cdot t^n\cdot\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^{n+1}}$

$t^n\cdot\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}$

(4)尺度变换

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$，$a>0$

则 $f(at)\leftrightarrow\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$ (单边)

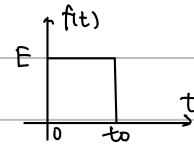
$f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\frac{s}{a})$ (双边)，无a限制

(5)延时特性

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$

则 $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}\cdot F(s)$

例1



$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$

$\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$，$\varepsilon(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}\cdot\frac{1}{s}$

$E[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)]\leftrightarrow\frac{E}{s}-\frac{e^{-st_0}\cdot E}{s}$

例2 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$ 拉氏变换

原式 $=1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\dots+e^{-nsT}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1(1-e^{-sT(n+1)})}{1-e^{-sT}}=\frac{1}{1-e^{-sT}}$ $(\sigma>0)$

(6) s域平移

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$

则 $f(t)e^{-at}\leftrightarrow F(s+a)$

例 $\mathcal{L}[e^{-at}\cdot\sin\omega t]$

$\sin\omega_0 t\leftrightarrow\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

$e^{-at}\cdot\sin\omega_0 t\leftrightarrow\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

$f(t)\leftrightarrow F(s)$

$\varepsilon(t-b)f(t-b)\leftrightarrow F(s)\cdot e^{-bs}$

$\varepsilon(at-b)f(at-b)\leftrightarrow\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})\cdot e^{-\frac{b}{a}s}$

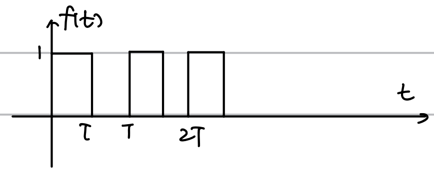
(7) 卷积定理

$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s)$ ， $f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$

则 $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)\cdot F_2(s)$

$f_1(t)\cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(s) * F_2(s)$

例



求拉氏变换

$f(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\tau)] * \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$

$\updownarrow \qquad \qquad \updownarrow$

$\frac{1}{s} - \frac{1}{s}\cdot e^{-s\tau} \qquad \frac{1}{1-e^{-sT}}$

$\therefore \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1-e^{-s\tau}}{s(1-e^{-sT})}$

(8) s域微分

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $(-t)\cdot f(t) \leftrightarrow \frac{dF(s)}{ds}$

$(-t)^n \cdot f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

例 求 $t^2 e^{-at}\varepsilon(t)$ 的拉氏变换

$\mathcal{L}[e^{-at}\varepsilon(t)] = \frac{1}{s+a}$

$(-t)\cdot e^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow -\frac{1}{(s+a)^2}$

$t^2 e^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{2}{(s+a)^3}$

$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$

$(-t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{s^2+\omega_0^2-2s^2}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \frac{\omega_0^2-s^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$

$t\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$

$\mathcal{L}[t\cos\omega_0 t] = \frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$

$\mathcal{L}[t\sin\omega_0 t] = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$

(9) s域积分

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{\infty} F(\eta)\, d\eta$

(10) 初值定理

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$，则 $\overbrace{\lim_{t\to 0^+} f(t)}^{f(0^+)} = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

若F(s)为假分式，则需将F(s)化为真分式再用初值定理

分子次数≥分母次数　假分式

例 $F(s)=\frac{s+2}{s+1}$， $f(0^+)=?$

$F(s) = 1 + \underbrace{\frac{1}{s+1}}$ 真分式部分

$\lim_{s\to\infty} \frac{s}{s+1} = 1$

(11) 终值定理

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$，则 $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

条件 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ 存在 （F(s)的极点均位于左半平面，或在s=0处只有一阶极点）

常用Laplace变换对

$\delta(t)$	1
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$\delta^{(n)}(t)$	s^n
$t^n\varepsilon(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin\omega_0 t\,\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\cos\omega_0 t\,\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$t\sin\omega_0 t\,\varepsilon(t)$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
$t\cos\omega_0 t\,\varepsilon(t)$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}$

△Laplace 逆变换

傅里叶变换对, 拉氏变换对

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega$ (Fourier逆变换)

$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega}F(s)\cdot e^{st}\,ds$ (Laplace逆变换)

有理分式 F(s) 部分分式展开法

①常用拉氏变换结合性质

$F(s)=\frac{e^{-2s}}{s+2}$

$e^{-2t}\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{1}{s+2}$

$e^{-2(t-2)}\varepsilon(t-2)\Leftrightarrow\frac{e^{-2s}}{s+2}$ (延时)

②有理分式 F(s) 逆变换

假分式=多项式+真分式

$\delta^{(n)}(t)\Leftrightarrow s^n$

$F(s)=\frac{s^4+8s^3+25s^2+31s+15}{s^3+6s^2+11s+6}=s+2+\frac{2s^2+3s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$ →部分分式展开法

$\delta'(t)+2\delta(t)$

△部分分式展开法

①极点为实数且无重根

$F(s)=\frac{A(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}\quad p_1\neq p_2\neq p_3$

$=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\frac{k_3}{s-p_3}$

$(s-p_1)F(s)=k_1+\frac{k_2(s-p_1)}{s-p_2}+\frac{k_3(s-p_1)}{s-p_3}$

$\therefore k_1=F(s)\cdot(s-p_1)|_{s=p_1}$

$k_2=F(s)\cdot(s-p_2)|_{s=p_2}$

$k_3=F(s)\cdot(s-p_3)|_{s=p_3}$

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=k_1e^{p_1t}+k_2e^{p_2t}+k_3e^{p_3t}$

例: $F(s)=\frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$

$k_1=\frac{10(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)}\Big|_{s=0}=\frac{100}{3}$

$k_2=\frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+3)}\Big|_{s=-1}=\frac{40}{-2}=-20$

$k_3=\frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)}\Big|_{s=-3}=\frac{-20}{6}=-\frac{10}{3}$

$\therefore F(s)=\frac{100}{3}\cdot\frac{1}{s}-20\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{s+3}$

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{100}{3}\cdot\varepsilon(t)-20e^{-t}\varepsilon(t)-\frac{10}{3}e^{-3t}\varepsilon(t)$

②包含共轭复数极点

$F(s)=\frac{A(s)}{D(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}=\frac{A(s)}{D(s)\cdot[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$

$D(s)$: 实根

$F(s)=\frac{H(s)}{(s+2)(s+3)(s+2-3j)(s+2+3j)}$

$=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+3}+\frac{k_3}{s+2-3j}+\frac{k_4}{s+2+3j}$

∵ F(s) 为实系数多项式之比, ∴ $k_1=k_2^*$

$\begin{cases}k_1=A+jB\\k_2=A-jB\end{cases}$

F(s)逆变换中两项 $(A+jB)\cdot e^{-(\alpha-j\beta)t}\varepsilon(t)+(A-jB)e^{-(\alpha+j\beta)t}\varepsilon(t)$

$=e^{-\alpha t}[(A+jB)e^{j\beta t}\varepsilon(t)+(A-jB)e^{-j\beta t}\varepsilon(t)]$

$=2e^{-\alpha t}\cdot A\cos\beta t+2e^{-\alpha t}\cdot(-B\sin\beta t)$

$=\underline{2e^{-\alpha t}(A\cos\beta t-B\sin\beta t)}$

例 $F(s)=\frac{s^2+3}{(s^2+2s+5)(s+2)}=\frac{s^2+3}{(s+2)[(s+1)^2+4]}$

$=\frac{s^2+3}{(s+2)(s+1+2j)(s+1-2j)}$

$=\frac{k_0}{s+2}+\frac{k_1}{s+1+2j}+\frac{k_2}{s+1-2j}$

$k_0=F(s)\cdot(s+2)|_{s=-2}=\frac{7}{5}$

$k_1=F(s)\cdot(s+1+2j)|_{s=-1-2j}=\frac{4j}{(1-2j)(-4j)}=\frac{-1}{1-2j}=\frac{-(1+2j)}{5}$

$=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}j$

$A=-\frac{1}{5},\ B=\frac{2}{5}$

$\therefore\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{7}{5}e^{-2t}\varepsilon(t)+2e^{-t}(-\frac{1}{5}\cos 2t-\frac{2}{5}\sin 2t)\varepsilon(t)$

△凑三角函数

$F(s)=\frac{s+\gamma}{(s+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{\beta\cdot\frac{\gamma-\alpha}{\beta}}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ 常数

$\cos(\omega t)\cdot e^{-\alpha t}$ 　 $\sin(\omega t)\cdot e^{-\alpha t}\cdot\frac{\gamma-\alpha}{\beta}$

$\sin(\omega t)\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

$\cos(\omega t)\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

② 有多重极点

$$F(s)=\frac{A(s)}{(s-p_1)^k\cdot D(s)}$$ $s=p_1$处有k阶极点

$$=\frac{k_1}{(s-p_1)^k}+\frac{k_2}{D(s)}$$

$$k_1=a_1s^{k-1}+a_2s^{k-2}+\dots+a_k$$

$$F(s)=\frac{k_{11}}{(s-p_1)^k}+\frac{k_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}+\frac{k_{13}}{(s-p_1)^{k-2}}+\dots+\frac{k_{1k}}{(s-p_1)}+\frac{\cdots}{D(s)}$$

$$t^n\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$t^n\cdot e^{p_1t}\cdot\varepsilon(t)\Leftrightarrow\frac{n!}{(s-p_1)^{n+1}}$$

$k_{11}=F(s)\cdot(s-p_1)^k\big|_{s=p_1}$ (只能求k_{11})

方法：令 $F_1(s)=F(s)\cdot(s-p_1)^n$

$$=k_{11}+k_{12}(s-p_1)+\dots+k_{1n}(s-p_1)^{n-1}+\frac{\cdots}{D(s)}\cdot(s-p_1)^k$$

$$\frac{dF_1(s)}{ds}=k_{12}+2k_{13}(s-p_1)+\dots+k_{1n}\cdot(n-1)\cdot(s-p_1)^{n-2}+\dots$$

$$\therefore k_{12}=\frac{dF_1(s)}{ds}\Big|_{s=p_1}$$

同理 $k_{13}=\frac{d^2F_1(s)}{ds^2}\Big|_{s=p_1}\cdot\frac{1}{2}$

$$k_{1n}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}F_1(s)}{ds^{n-1}}\Big|_{s=p_1}$$

△拉氏变换的应用

$$x(t)*h(t)=y(t)$$

$$\Rightarrow X(s)\cdot\underbrace{H(s)}_{系统函数}=Y(s)$$

$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$ 针对于零状态响应

△拉氏变换求解微分方程

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$$

$$y(0^-)=2,\ y'(0^-)=1,\ f(t)=\varepsilon(t)$$

$y(t)\Leftrightarrow Y(s)$

$y'(t)\Leftrightarrow sY(s)-y(0^-)$

$y''(t)\Leftrightarrow s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)$

左边 $=s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+3sY(s)-3y(0^-)+2Y(s)$

$=(s^2+3s+2)Y(s)+[-3y(0^-)-sy(0^-)-y'(0^-)]$

右边 $=2sF(s)-2\overset{=0\ 因果系统}{f(0^-)}+6F(s)=(2s+6)\cdot F(s)$

$$(s^2+3s+2)Y(s)=(2s+6)F(s)+3y(0^-)+sy(0^-)+y'(0^-)$$

$$Y(s)=\underbrace{\frac{2s+6}{s^2+3s+2}F(s)}_{零状态响应}+\underbrace{\frac{3y(0^-)+sy(0^-)+y'(0^-)}{s^2+3s+2}}_{零输入响应}$$

$F(s)=\frac{1}{s}$

$$y_{zs}(t):\ \frac{2s+6}{s(s+1)(s+2)}=\frac{3}{s}+\frac{-4}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

$$y_{zs}(t)=(3-4e^{-t}+e^{-2t})\cdot\varepsilon(t)$$

$$y_{zi}(t):\ \frac{6+2s+1}{s^2+3s+2}=\frac{2s+7}{(s+1)(s+2)}=\frac{5}{s+1}+\frac{-3}{s+2}$$

$$y_{zi}(t)=(5e^{-t}-3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$\therefore y(t)=(e^{-t}-2e^{-2t}+3)\varepsilon(t)$$

△求系统函数(零状态条件下) $y(0^-),\ y'(0^-)=0$

△ 系统函数的零极点分析

$H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$

$H(s)=\frac{s[(s-1)^2+1]}{(s+1)^2(s^2+4)}=\frac{s(s-1+j)(s-1-j)}{(s+1)^2(s+2j)(s-2j)}$

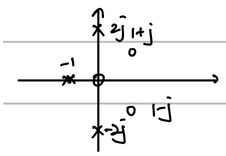
极点：$s=-1$（二阶），$s=-2j$，$s=2j$

零点：$s=0$，$s=1+j$，$s=1-j$，$s=\infty$（一阶零点）

分母阶 m，分子阶 n

① $m>n$　$s\to\infty$，$H(s)\to 0$，在 ∞ 处 $(m-n)$ 阶零点

② $m<n$　$s\to\infty$　$H(s)\to\infty$，在 ∞ 处 $n-m$ 阶极点



△ $H(s)$ 零极点与波形关系

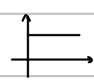
$H(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$

$=\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\frac{A_3}{s-p_3}$

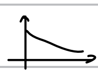
若 p_1 为实数　$A_1\cdot e^{p_1 t}\varepsilon(t)$

p_2, p_3 为共轭复数　$e^{\alpha t}(a\cos\beta t+b\sin\beta t)$

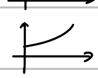
① $H(s)=\frac{1}{s}\leftrightarrow\varepsilon(t)$



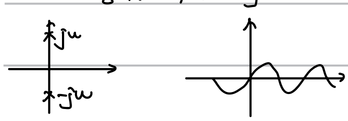
② $H(s)=\frac{1}{s+a}\leftrightarrow e^{-at}\varepsilon(t)$



③ $H(s)=\frac{1}{s-a}\leftrightarrow e^{at}\varepsilon(t)$

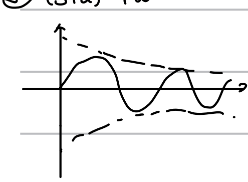


④ $H(s)=\frac{w}{s^2+w^2}$，$s=\pm jw$

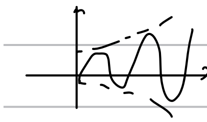


$H(s)=\frac{s}{s^2+w^2}$　（零点控制相位/幅度，极点控制波形）

⑤ $\frac{w}{(s+a)^2+w^2}\leftrightarrow e^{-at}\sin wt\ \varepsilon(t)$



⑥ $H(s)=\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$　$S_1=a+jw$，$S_2=a-jw$



小结：极点左半平面 → 衰减

右半平面 → 增长

虚轴 → 等幅/振荡

△因果系统

充要：收敛域为 $\sigma>\sigma_0$

分子阶次 > 分母阶次，不是因果系统

(含s项，相当于时域求导)

△系统函数分析系统稳定性

对于因果系统：

①极点均在 s 左侧：稳定系统

②存在虚轴上的一阶极点，其它均位于s平面左侧：临界稳定系统

③虚轴上二阶极点或s平面右侧的极点：不稳定系统

△Laplace 变换与Fourier 变换

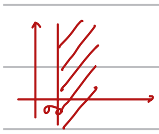
$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$

$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$

$f(t)$ 因果信号 $F(j\omega)=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$

$\therefore F(s)\big|_{s=j\omega}=F(j\omega)$

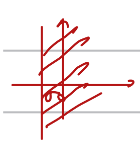
① $\sigma_0>0$



虚轴不在收敛域内

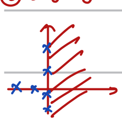
$F(j\omega)$ 不存在

② $\sigma_0<0$



$F(j\omega)=F(s)\big|_{s=j\omega}$

③ $\sigma_0=0$



$F(s)=\dfrac{\cdots}{(s+a)(s+b)(s+c)(s-j\omega_a)(s+j\omega_a)}$

左半平面

$=\underbrace{\dfrac{\cdots}{s+a}+\dfrac{\cdots}{s+b}}+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{k_i}{s-j\omega_i}$

$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

$f(t)=f_a(t)+f_b(t)+\ldots+\sum_{i=1}^{n}k_i\cdot e^{j\omega_i t}\varepsilon(t)$

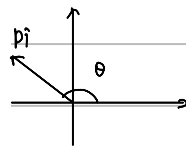
$F(\omega)=F_a(s)\big|_{s=j\omega}+F_b(s)\big|_{s=j\omega}+\ldots+\sum_{i=1}^{n}k_i\dfrac{1}{j(\omega-\omega_i)}+\sum_{i=1}^{n}k_i\cdot\pi\delta(\omega-\omega_i)$

$\therefore F(\omega)=F(s)\big|_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{n}k_i\pi\delta(\omega-\omega_i)$

△频率响应

$H(s)=\dfrac{b_m\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$

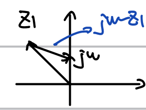
$H(\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}=\dfrac{b_m\cdot\prod_{j=1}^{m}(j\omega-z_s)}{\prod_{i=1}^{n}(j\omega-p_i)}$ (p_i 可能为复数)



$\therefore H(\omega)=\dfrac{b_m\prod_{j=1}^{m}B_j\cdot e^{j\varphi_j}}{\prod_{i=1}^{n}A_i e^{j\theta_i}}=\dfrac{b_m\cdot B_1B_2\ldots B_m}{A_1A_2\ldots A_n}\cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m-\theta_1-\theta_2-\ldots-\theta_n)}$

$H(\omega)=|H(\omega)|\cdot e^{j\varphi_\omega}$

$j\omega-z_1$:



△全通函数(零极点关于虚轴对称)

△最小相移函数(零点位于左半平面)

非最小相移系统 = 上面两者级联